Фейнмановские диаграммы

R. Rogalyov[1,4]

[1] IHEP, Protvino; [4] FEFU, Vladivostok

9.10.2019

- Пространство состояний
- Символы операторов
- теорема Вика
- Представление взаимодействия и S-матрица
- Формула Дайсона
- Фазовый объём; рассеяние скалярных частиц
- Вычисление фейнмановских интегралов

Аномальные магнитные моменты электрона и мюона по состоянию на 2017 год:

$a_e = a_e(QED)$

$$\begin{aligned} a_e^{theor} &= 0.001\,159\,652\,181\,643(764) \\ a_e^{exp} &= 0.001\,159\,652\,180\,73(28) \end{aligned} \tag{1}$$

$a_\mu = a_\mu(QED) + a_\mu(SM) + a_\mu(hadron)$

$$\begin{aligned} a_\mu^{theor} &= 0.001\,165\,918\,04(51) \\ a_\mu^{exp} &= 0.001\,165\,920\,9(6) \end{aligned} \tag{2}$$

Разница $\simeq 3.5\sigma$

Оператор свободного поля

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}}{2p_0} \left(a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right) \tag{3}$$

$$px = p_0\, x_0 - p_i\, x_i, \qquad p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\ .$$

$$\dot{\varphi}(x) = \frac{-\,i}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}}{2} \left(a(\vec{p}) e^{-ipx} - a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right) \tag{4}$$

$$\left[\dot{\varphi}(t, \vec{x}), \varphi(t, \vec{y}) \right] = -i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \tag{5}$$

The creation and annihilation operators can be expressed in terms of the field and its derivatives,

$$\begin{aligned} a(\vec{q}) &= e^{it\sqrt{\vec{q}^2+m^2}} \int d\vec{x}\; e^{-\,i\vec{q}\vec{x}} \left(\sqrt{\vec{q}^2+m^2}\,\varphi(t,\vec{x}) \;+\; i\dot{\varphi}(t,\vec{x}) \right) \\ a^\dagger(\vec{q}) &= e^{-\,it\sqrt{\vec{q}^2+m^2}} \int d\vec{y}\; e^{i\vec{q}\vec{y}} \left(\sqrt{\vec{q}^2+m^2}\,\varphi(t,\vec{y}) \;-\; i\dot{\varphi}(t,\vec{y}) \right) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\left[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})\right] = 2\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\,(2\pi)^3\,\delta(\vec{p}-\vec{q}) \tag{7}$$

$|p\rangle = a^\dagger(\vec{p})|0\rangle$

$$H = H_0 + V, \qquad U(t) = e^{-iHt} \qquad U_0(t) = e^{-iH_0 t} \tag{8}$$

Мёллеровские волновые операторы

$\boxed{\text{связанные состояния}}$ $\qquad$ $\boxed{\text{состояния рассеяния}}$

$$\lim_{t\to+\infty} U^\dagger(t) U_0(t) = \Omega_- \tag{9}$$

$$\lim_{t\to-\infty} U^\dagger(t) U_0(t) = \Omega_+ \tag{10}$$

$$\Omega_+ |\psi_{in}\rangle = \psi\rangle \qquad \Omega_- |\psi_{out}\rangle = \psi\rangle \tag{11}$$

$S = \Omega_-^\dagger \Omega_+$

$$\langle p''|p'\rangle = (2\pi)^3 2\sqrt{(\vec{p}\,')^2 + m^2}\ \delta(\vec{p}\,' - \vec{p}\,'') \tag{12}$$

$$S = T\exp(i\int \mathcal{L}_{int}(x)\, dx) \tag{13}$$

Now we compule the scattering amplitude in the tree approximation,

$$\begin{aligned} \langle p_1, p_2|S|p_a, p_b\rangle \;&=\; 4p_{a,0}p_{b,0}\,(2\pi)^6\Big[\delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_a)\delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_b) \\ &\qquad + \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_b)\delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_a)\Big] \\ &\quad + i\,(2\pi)^4\,\delta(p_a + p_b - p_1 - p_2)\,\mathcal{T}(s,t)\ , \end{aligned} \tag{14}$$

$s = (p_a + p_b)^2,\ t = (p_a - p_1)^2.$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi \; - \; \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \; - \; \frac{g}{24}\varphi^4. \tag{15}$$

$$S_1 = \; - \frac{ig}{24}\int :\varphi^4(x): \; dx \; = \; - \frac{ig}{24}\,\frac{1}{(2\pi)^{12}}\int \frac{d\vec{k}\; d\vec{q}\; d\vec{p}\; d\vec{r}}{16\, k_0\, q_0\, p_0\, r_0}\; dx$$
$$: \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{ikx} + \hat{a}(\vec{k})e^{-\,ikx}\right]\left[\hat{a}^\dagger(\vec{q})e^{iqx} + \hat{a}(\vec{q})e^{-\,iqx}\right]$$
$$\left[\hat{a}^\dagger(\vec{p})e^{ipx} + \hat{a}(\vec{p})e^{-\,ipx}\right]\left[\hat{a}^\dagger(\vec{r})e^{irx} + \hat{a}(\vec{r})e^{-\,irx}\right]:$$

It is straightforward matter to derive

$$\langle p_1, p_2|S_1|p_a, p_b\rangle = -ig\,(2\pi)^4\,\delta(p_a + p_b - p_1 - p_2)\;. \tag{16}$$

Therefore, in this approximation

$$\mathcal{T}(s,t) \; = \; -\,g\;. \tag{17}$$

Определяем фазовый объём в пространстве состояний "первичного квантования"

$$d\Gamma_n = \frac{d\vec{p}_1}{2E_1}\frac{d\vec{p}_2}{2E_2}\ \dots\ \frac{d\vec{p}_n}{2E_n}\delta(p_a + p_b - p_1 - p_2 - \dots - p_n) \qquad (18)$$

and note that

$$\int d\Gamma_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}}\int_{t^-}^{t^+} dt \qquad (19)$$

$$\int d\Gamma_3 = \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}}\int_{s_2^-}^{s_2^+} ds_2 \int_{t_1^-}^{t_1^+} dt_1 \int_{t_2^-}^{t_2^+} dt_2 \int_{s_1^-}^{s_1^+} \frac{ds_1}{\sqrt{G_4}}.$$

Сечение $\sigma(p_a, p_b \to p_1, p_2)$.

$$\sigma(p_a, p_b \to p_1, p_2) = \tag{20}$$
$$\frac{(2\pi)^{4-3*2}}{2\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}} \int \frac{d\vec{p}_1}{2E_1} \frac{d\vec{p}_2}{2E_2} \delta(p_a + p_b - p_1 - p_2)|\mathcal{M}_{2\to2}|^2$$

$$\sigma(p_a, p_b \to p_1, p_2, p_3) = \tag{21}$$
$$\frac{(2\pi)^{4-3*3}}{2\sqrt{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}} \int \frac{d\vec{p}_1}{2E_1} \frac{d\vec{p}_2}{2E_2} \frac{d\vec{p}_3}{2E_3} \delta(p_a + p_b - p_1 - p_2 - p_3)|\mathcal{M}_{2\to3}|^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{2\to2}}{dt} &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \\ \frac{d\sigma_{2\to3}}{dt_1\, dt_2\, ds_1\, ds_2} &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{(4\pi)^4\ \lambda(s, m_a^2, m_b^2)\ \sqrt{G_4}}. \end{aligned} \tag{22}$$

1. В.С.Владимиров, Уравнения математической физики
2. Ф.А.Березин, Метод вторичного квантования
3. И.С.Гельфанд, М.Е.Шилов. Обобщённые функции
4. Дж.Тейлор. Теория рассеяния. Мир, М., 1975.
5. Дж.Д.Бьеркен, С.Д.Дрелл. Релятивистская квантовая теория. т.1 и 2, М., Наука, 1978.
6. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика. М., Наука, 1969.
7. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, М., 1963.
8. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Квантовые поля. Наука, М., 1980.

9. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля, тт. 1,2. Мир, М., 1984.
10. Умэдзава Х., Мацумото Х., Татики М. Термополевая динамика и конденсированные состояния. Мир, М., 1985.
11. О.И.Завьялов, Перенормированные диаграммы Фейнмана
12. С.Вайнберг, Квантовая теория поля
13. H.Rothe, Lattice Field Theory
14. J.Kapusta and C. Gale,
15. Tkachov, Fyodor V., "Theory of asymptotic operation. a summary of basic principles Sov.J.Part.Nucl.,vol.25 (1994) 649; eprint: arXiv hep-ph/9701272
16. Lehmann H., Symanzik S., Zimmermann W. Nuovo Cim., v.6 (1957) 319.

17. Э.Хенли, В.Тирринг, "Элементарная квантовая теория поля", ИЛ 1963
18. А.М.Цвелик, "Квантовая теория поля в физике конденсированного состояния" Физматлит 2002
19. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, "Кватовая электродинамика" (т.4 курса Ландау-Лифшица)
20. Borodulin,V.I., Rogalyov,R.N., and Slabospitskii,S.R., CORE 3.1 (COmpendium of RElations, Version 3.1); eprint: arXiv 1702.08246